84. 中野氏ノ論文 Zur Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen ヘノ一瞥

南雲道夫（阪大）

昨年ノ日本數學輯報ニ現ハレタ中野秀五郎氏ノ上記ノ論文ハ70頁ニ及ブ大論文ナルタメ敬遠シテヰマシタ。最近バラバラト其ノ頁ヲ繰ッテ内味ヲ一寸ノゾイテ見マシタ結果、ソノ前半ノ結果ノ重ナルモノガ次ノ如キモノデアラウト思ハレマス。

$$L_x(y)=\left(\frac{d^n}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\cdots\cdots+p_n(x)\right)y=0$$

ナル微分方程式ヲバ；氏ノ所謂 Charakteristische Lösung $\chi(x,t)$ ヲ用ヒルコトニヨリ、Volterra ノ積分方程式論ニ於ケル考ヘ方ト結ビツイテ、ソノ性質ヲ研究スルノガ本論文デアリマセウ。

1] $L_x(y)=f(x)$ ヲ解ク事

之ハ已ニヨク知ラレタ方法ガアリマスガ、中野氏ハ次ノ如キ考ヘ方ヲ用ヒマシタ。

$$y(a)=A_0,\quad y^{(i)}(a)=A_i,\quad (i=1,\cdots\cdots,n-1)$$ トシ、

$$\varphi(x,a)=y(x)-\sum_{i=0}^{n-1}A_i\frac{(x-a)^i}{i!}$$ トオク事ニヨリ

上ノ方程式ハ $L_x(\varphi(x,a))=\Phi(x,a)$

ナル形ニ帰着サレマス。（$\Phi(x,a)$ ハ $f(x)$ ト $A_i,(x-a)^i$, 等カラ成立）

$\varphi(x,a)$ ハ $x=a$ ニ於テ n 次ノ零トナル函數デス。

一般ニ $\varphi(x,t)$ ガ $x=t$ ニ於テ n 次ノ零トナル時，即チ

$$\varphi(t,t)=0,\quad \left(\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\right)_{x=t}=\cdots\cdots=\left(\frac{\partial^{n-1}\varphi(x,t)}{\partial x^{n-1}}\right)_{x=t}=0$$

ナル函數ヲ中野ノ條件ヲ満タス函數ト呼ビマセウ、シカラバ微分方程式論ヨリ　中野ノ條件ヲ満タス $\varphi(x,t)$ ニツキ

$$L_x(\varphi(x,t))=\Phi(x,t)\qquad(\Phi(x,t)\text{ ハ任意！})$$

カラ $\varphi(x,t)$ ハ常ニ一義的ニ決定サレマス。　ソノ結果ハ Volterra ノ運算

$$\varphi(x,t)=\int_t^x \chi(x,\xi)\,\Phi(\xi,t)\,d\xi$$

ニヨッテ得ラレマス。茲ニ現ハレタ $\chi(x,t)$ ハ中野氏ノイワユル Charakteristische Lösung ナルモノデ次ノ如ク定義サレマス。

$$L_x(\chi(x,t))=0,\qquad[\chi(x,t)\text{ ハ }L_x(y)=0\text{ ノ積分デアル}]$$

$$\begin{cases}\chi(t,t)=0\\ \left(\dfrac{\partial^i\chi}{\partial x^i}(x,t)\right)_{x=t}=\begin{cases}0 & 1\leqq i\leqq n-2\\ 1 & i=n-1\end{cases}\end{cases}$$

ソコデ任意ノ函數 $\Phi(x,t)$ ニ對シ

$$\mathfrak{K}\,\Phi(x,t)=\int_t^x \chi(x,\xi)\,\Phi(\xi,t)\,d\xi$$

ナル運算（Volterra 式運算）ヲ $\mathfrak{K}$ トスレバ，

中野ノ條件ヲ満タス $\varphi(x,t)$ ニツイテ $\mathfrak{K}$ ハ L_x ノ逆運算デアリマス！

〔証明〕　$\varphi(x,t)=\int_t^x \chi(x,\xi)\,\Phi(\xi,t)\,d\xi$ 　ニ於テ

$\chi(x,t)$ ガ上ニ定義シタ *Charakteristische Lösung* トスル時 $L_x(\varphi(x,t))=\Phi(x,t)$ ヲ証明スル。

$i=1,\cdots\cdots,n-1$ デハ順次ニ上ノ式ノ両辺ヲ x ニツキ微分スレバ

$$\varphi^{(i)}(x,t)=\int_t^x \chi^{(i)}(x,\xi)\Phi(\xi,t)d\xi$$

$$\left[\chi^{(i)}(x,\xi)=\frac{\partial^i\chi}{\partial x^i}\right] \quad \left[\chi^{(i-1)}(x,x)=0 \quad \text{ニヨル}\right]$$

又
$$\varphi^{(n)}(x,t)=\Phi(x,t)+\int_t^x \chi^{(n)}(x,\xi)\Phi(\xi,t)d\xi$$

$\left[\chi^{(n-1)}(x,x)=1 \text{ ニヨル}\right]$ 之カラ両辺ニ $p_{n-i}(x)$ ヲ掛ケテ加ヘ合セバ

$$L_x(\varphi(x,t))=\Phi(x,t)+\int_t^x L_x(\chi(x,\xi))\Phi(\xi,t)d\xi$$

所ガ
$$L_x(\chi(x,\xi))=0 \quad \text{ナルニヨリ}$$

$$L_x(\chi(x,t))=\Phi(x,t) \qquad \text{(証明了)}$$

2] Adjungiert ナ方程式

以上ガ基礎デ、ソレカラ種々ナ結果ガ出マスガ、ソノ中ノ目星シイモノノ一二ダケヲ述ベマス。

$\varphi(x,t)$ 及ビ $\psi(x,t)$ ヲバ中野ノ條件ヲ満足スル任意ノ函数トスルトキ

$$(1)\quad \int_{t_1}^{t_2}\left[\varphi(x,t_1)L_x(\psi(x,t_2))-(-1)^n\psi(x,t_2)\widetilde{L}_x(\varphi(x,t_1))\right]dx=0$$

ナル関係ガ常ニ成立スルトキ，L_x ト $\widetilde{L}_x$ トハ互ニ Adjungiert デアルト云フ。（之ハ普通ニ用ヒラレテヰル定義ト一致スル

コト八明カデセウ）、シカラバ

L_x ニ對スル Charakteristische Lösung ヲ $\chi(x,t)$

トシ

$\tilde{L}_x$ ニ對スル Charakteristische Lösung ヲ $\tilde{\chi}(x,t)$

トスレバ

$$\tilde{\chi}(x,t) = -(-1)^n \chi(t,x)$$

トナル。

［証明］ $u(x,t)$ ヲ中野ノ條件ヲ滿タス任意ノ函数トスルトキ，L_x ト $\chi(x,t)$ トノ關係カラ（互ニ逆トナル）一般ニ

$$u(x,t) = \int_t^x \chi(x,\xi) L_\xi(u(\xi,t))\,d\xi$$

ガ成立スル。故ニ（1）カラ（$\tilde{L}$ ニ對シテハ $\tilde{\chi}$）

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{x} \tilde{\chi}(x,\xi)\tilde{L}_\xi(\varphi(\xi,t))L_x(\psi(x,t_2))\,d\xi\,dx$$

$$-(-1)^n\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_2}^{x} \chi(x,\xi)L_\xi(\psi(\xi,t))\tilde{L}_x(\varphi(x,t_1))\,d\xi\,dx = 0$$

茲デ積分ノ順序ヲ変ヘレバ、結局

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_2}^{x}\left\{\tilde{\chi}(x,\xi) + (-1)^n\chi(\xi,x)\right\}L_x(\psi(x,t_2))\tilde{L}_\xi(\varphi(\xi,t_1))\,d\xi\,dx = 0$$

所ガ
$$\left.\begin{aligned} L_\xi(\varphi(\xi,t_1)) &= g(\xi,t_1) \\ \tilde{L}_x(\psi(x,t_2)) &= f(x,t_2) \end{aligned}\right\}$$

ハ全ク任意ノ連続函数トナルカラ

$$\tilde{\chi}(x,\xi) = -(-1)^n\chi(\xi,x).$$

3] *Komposition*

L_1, L_2 ナルニツノ微分運算ヲ結合シタモノ

$$L_3 y = L_2(L_1 y)$$

ニ對シテハ *Charakteristische Lösung* ハ *Volterra* ノ結果トナル。（但シ順ハ逆） 即チ L_3 ニ對スル $\chi_3(x,t)$ ハ

$$\chi_3(x,t)=\int_t^x \chi_1(x,\xi)\,\chi_2(\xi,t)\,d\xi$$

〔証明〕 $\chi(x,t)$ ヲ *Kern* トスル *Volterra* ノ運算 $\mathfrak{K}$ ガ L_x ノ逆ナルコトヲ考ヘレバ $\chi_3(x,t)$ ハ $\mathfrak{K}_1 \mathfrak{K}_2$ 相當スル *Kern* デアル。之レカラ上ノコトハ容易ニ結論サレル。

4] 上ノ事ノ他 $\chi(x,t)$ ハ L_x カラ一義的ニ求メラルガ $\chi(x,t)$ ヲ計算シテ出ス方法（*Volterra* ノ積分方程式ヲ解ク）。 又 $\chi(x,t)$ ガ如何ナルトキ，一ツノ L_x ノ逆トナルカ。 $\chi(x,t)$ ヲ與ヘタトキ、L_x ガ一義的ニ求メラルコト。 $\chi(x,t)$ ト *Wronskian* トノ關係等々々。

× × × × ×

以上ハ全ク一瞥デ、中野氏ノ大論文ノ要点ニ觸レナカツタコトト恐レマス。只銀塊ノ中ニダイヤモンドガ埋モレテ居レバ具眼ノ士ニハ直チニソノ所在ヲ明ラカニスルコトガ出來マセウガ、愚凡者ハ只ソノ尨大ナル外觀ニ幻惑シテ、ソノ眞髄ガ何処ニアルノカ解リマセン。從ッテ銀ヲ取リ除イテダイヤモンドダケヲ取リ出シテ見セテモライ度イノデス。最近同

君ノ第二ノ大論文ガ出マシタ。甚ダ勝手ナガラ同君ニソノ論文ノ最モ大切ナ要点ヲ、簡単ニシカモ平易ニ、本紙上ニ御紹介下サル様御願ヒシテ筆ヲ擱キマス。　（妄言多謝）

正誤—— Topologische Gruppe トシテ Lie 氏変換群ニ就テ（第26号）——三村征雄

5頁　7行及ビ8行ニ於テ

$a:k$, $b:k$ トアルハ a_{ik}, b_{ik} ノ誤リ

7頁　1行ニ於テ

ソレハ　ハ　ソレヲ　ノ誤リ

補遺—— Cartan —角谷— Selberg ノ定理ニ就テ（第25号）——吉田耕作

角谷君ニヨレバ角谷君ノ結果ハ次ノ如ク一般ニ述ベラレルノデアッテ、第25号ニ於テハ筆者ハ其ノ点ヲ見落シテ角谷君ノ結果ヲ御紹介シタ譯デアッタ。コヽニ角谷君ニオ詫ビスル次第デアル。

有理型函数 $y=f(x)$ ノ逆函数 $x=g(y)$ ノ Riemann 面 F_y ヲ円 $|y|=k$ デ切ルトキ全テ有限枚ツナガッタ円板ガ切リトラレ（但シ其ノ Branch point ハ $|y|<k_1<k$ ニノミアル。併シ $y=0$ ニ於テノミ分岐スルコトヲ要求シナ

イ。コノ点が筆者ノ見落シタ所デス）且ツ $|x|=r$ ノ $f(x)$ ニヨル Bild ニヨッテ切ラレル円板ノ最大連結数ヲ $\lambda(r)$ トスルトキ

$$\int^{r}\frac{\lambda(t)^2}{t}dt=O\left(A(r)^{1-\varepsilon}\right),\ \ \varepsilon>0$$

ナラバ $\delta(0)=0$.

即チ $y=0$ ニ於テノミ分岐スルト仮定スレバ筆者ノ結果ノ方が、ズット精密デアルが，分岐点ノ位置ヲ指定シナクトモスム所ニ角谷君ノ方法ノスグレタ所がアッタノデアリマス。

併シ筆者ニハ結局コノ defaut ノ order ノ問題ハ角谷君ノ如キ仮定ノ下ニモ Selberg ト同ジ様ニナルノダト思ヒマス。

筆者ニハマダ証明が出来ナイノデスが，上ノ仮定ノモトニ第24号ノ結果ヲ使フト

$$\begin{cases} N(r,a)=T(r,f)+K(r,a), & |a|=\dfrac{k_1+k}{2} \\ |K(r,a)|\leq\lambda(r)\left\{m\left(r,\dfrac{f'}{f}\right)+2\log r\right\} & \text{for large } r \end{cases}$$

が云ヘルコトト $|y|\leq k-\varepsilon,\ \varepsilon>0$ ノ $x=g(y)$ ニヨル Bild ハ互ニ外ニアル閉デタ領域ニナルコトトカラ anschaulich ニソウ思ハレルノデス。第24号(3)ニ於ケルヨリモモット精密ナ derivative ノ Abschätzung が出来タラ証明出来ルノデセウが、コノ点御高教ヲ得タイト思ヒマス。 (以上)